[P1] Zeigen Sie, daß für beliebige quadratintegrable Funktionen $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$ über

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \overline{\phi(x)}\psi(x)$$

ein hermitesches Skalarprodukt definiert wird.

[P2] Berechnen Sie für $\psi(x) = \exp(-(\frac{x}{\sqrt{2}a})^2)$ und $a > 0$ das Quadrat der Norm, d.h.

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, |\psi(x)|^2 .$$

Ist die Gleichung $(\hat{X}\psi)(x) = x\psi(x)$ eine Eigenwertgleichung? Zeichnen Sie die Funktionen $\psi(x)$ und $x\psi(x)$. Wie sieht eine Eigenwertgleichung für $\hat{X}$ aus? Zeigen Sie, daß die Eigenwertgleichung die Funktion $\psi(x)$ bis auf Normierung eindeutig festlegt.

[P3] Machen Sie sich die in der Vorlesung gemachten Bemerkungen zur Bracketschreibweise klar: Seien die möglichen Eigenzustände eines Systems mit Λ_i bezeichnet. Dann läßt sich z.B. der Hamiltonoperator schreiben als

$$H = \sum_{i,j} |\Lambda_i\rangle\langle\Lambda_i|H|\Lambda_j\rangle\langle\Lambda_j| = \sum_{i,j} |\Lambda_i\rangle H_{ij}\langle\Lambda_j| .$$

Dies definiert die Matrixelemente H_{ij} des Operators H. Ein beliebiger Zustand läßt sich schreiben als

$$|\psi\rangle = \sum_i |\Lambda_i\rangle\psi_i .$$

Zeigen Sie, daß dann gilt:

$$|H\psi\rangle = \sum_{i,j} |\Lambda_i\rangle H_{ij}\psi_j .$$

Machen Sie sich klar, daß in **P1** offensichtlich

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, |x\rangle\psi(x) , \qquad \psi(x) = \langle x|\psi\rangle$$

die Verallgemeinerung der obigen Schreibweise auf eine kontinuierliche Basis von Eigenzuständen darstellt. Was ergibt $\langle x|x'\rangle$?

[P4] Die δ-Distribution ist für alle stetigen Testfunktionen f definiert durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0) .$$

Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} x\delta(x) &= 0 , \\ \delta(ax) &= \frac{1}{|a|}\delta(x) , \\ \delta(x^2 - a^2) &= \frac{1}{2|a|}\left(\delta(x - a) + \delta(x + a)\right) . \end{aligned}$$